

Cahit Arf Matematik Günleri V - 2006

Birinci Gün

1. Ayşe'yle Bora birer kez zar atıyorlar. Ayşe'ye gelen zara a , Bora'ya gelen zara b diyelim. Eğer $a \geq b$ ise Ayşe kazanıyor. Aksi takdirde Bora kazanıyor. Ayşe kazandığında 1 kazanıyor. Kimseye haksızlık olmaması için Bora kazandığında kaç kazanmalıdır?

Yanıt: Gelebilecek (a, b) zarlarını bir tablo halinde yazalım.

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

Görüldüğü gibi Ayşe 21 kez, Bora 15 kazanıyor. Demek ki, Eğer Bora kazandığında x kazanırsa Ayşe'nin beklentisi $(21/36) \times 1 - (15/36) \times x$ olur. Kimseye haksızlık olmaması için beklentinin 0 olması gerekmektedir. Demek ki $21 - 15x = 0$ olması, yani $x = 21/15 = 7/5 = 1,4$ olmalıdır.

2. Elimde s lira var ve biri kendisiyle şu oyunu oynamamı öneriyor: Zar atacağım. Eğer zar 1 gelirse s liramı kaybedeceğim. Eğer 1'den değişik bir zar gelirse, gelen zar kadar para kazanacağım. Hangi s değerleri için bu oyunu oynamalıyım?

Yanıt: Oyundan beklentimi hesaplamalıyım. $1/6$ olasılıkla s kaybedeceğim, $1/6$ olasılıkla 2 kazanacağım, $1/6$ olasılıkla 3 kazanacağım, ... vs. Bu oyundan beklentim,

$$-s/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6$$

dir. Oyunu oynamam için beklentimim negatif olmaması lazım, yani $-s + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \geq 0$ olmalı. Demek ki $s < 20$ ise oyunu oynamalıyım, $s = 20$ ise oynasam da olur oynamasam da. Ama eğer $s > 20$ ise oyunu oynamamalıyım.

3. $x^2 + 2x + 3 \equiv 0 \pmod{48}$ denkleminin $0 \leq x < 48$ eşitliklerini sağlayan kaç tamsayı çözümü vardır?

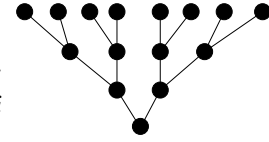
Yanıt: $(x + 1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ eşitliğinden dolayı, $x^2 + 2x + 3 \equiv 0 \pmod{48}$ denkleminin bir çözümü olması için -2 'nin modülo 48 bir tamkare olması lazım. Dolayısıyla -2 'nin (yani 14 'ün) mo-

dülo 16 bir tamkare olması lazım. 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 ve 14 sayılarını denemek yeterli. $4^2 \equiv 0 \pmod{16}$ olduğundan, 4'e bölünmeyen 2, 6, 10, ve 14 sayılarını denemek yeterli. Bu sayılar da $2 + 4i$ biçiminde yazıldığından, bu sayıların kareleri modülo 16, 4'e eşittir. Dolayısıyla çözüm yoktur.

4. n , 2 ve 5'e bölünmeyen bir doğal sayıdır. nk sayısının onluk tabanında yazılımlarında sadece 1 rakamının olduğu, yani $nk = 111\dots111$ türünden bir eşitliğin sağlandığı bir k tamsayısının varlığını kanıtlayın. (Örneğin $7 \times 15873 = 111.111$).

Kanıt: Onluk tabanda en fazla $n + 1$ tane 1 rakamıyla yazılan $111\dots111$ biçimindeki $n + 1$ tane sayının en az ikisi modülo n eşit olması gerekir. İçinde i tane 1 rakamı bulunan sayıya a_i dersek, $j < i \leq n$ için, $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ elde ederiz. Demek ki $n, a_i - a_j = a_{i-j} \times 10^j$ sayısını bölüyor. 2 ve 5 sayıları n 'yi bölmediğinden, n, a_{i-j} sayısını böler.

5a. Aşağıdaki şekilde ikili bir çizge örneği görüyorsunuz. ("İkili" çünkü her noktadan iki "dal" çıkıyor.) Bu çizgenin noktalarının aşağıdaki özelliği sağlayan kaç tane f dönüşümü vardır? " P ve Q noktaları bağımlı $\Leftrightarrow f(P)$ ve $f(Q)$ noktaları bağımlı." (Not: Bir dönüşüm birebir ve örten bir fonksiyondur.)

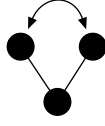


5b. Yukardaki ikili çizgenin yüksekliği 3'tür (çünkü en aşağıdan en yukarıya 3 adımda çıkılır.) Yüksekliği h olan bir çizgenin yukardaki özelliği sağlayan kaç dönüşümü vardır?

Yanıt: Sorudaki özelliği sağlayan bir dönüşüm özyapı dönüşümü adı verilir. Özyapı dönüşümlerinin şu özellikleri vardır:

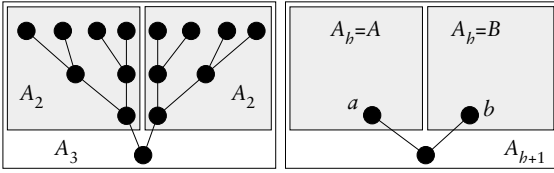
- Hiçbir noktanın yerini değiştirmeyen özdeşlik fonksiyonu Id bir özyapı dönüşümüdür.
- Eğer α bir özyapı dönüşümüyse, α^{-1} de bir özyapı dönüşümüdür.
- Eğer α ve β birer özyapı dönüşümüyse, $\alpha \beta$ da bir özyapı dönüşümüdür.

Önce yüksekliği 1 olan ikili çizgeyi ele alalım. Bu çizgenin iki tane özyapı dönüşümü vardır: Id ve en tepedeki iki noktanın yerlerini değiştiren dönüşüm. (**Ağacın kökü** adı verilen en alttaki nokta, çizgenin iki bağıntısı olan tek nokta olduğundan, her özyapı dönüşümü tarafından sabitlenir.)



n_b , yüksekliği b olan ikili ağacın eşyapı dönüşümü sayısı olsun; n_b bulmak istediğimiz sayı. Demek ki $n_1 = 2$. Ayrıca $n_0 = 1$. Şimdi n_b ile n_{b+1} arasında bir ilişki bulalım, ki n_b 'yi tümevarımla bulma şansını yaratalım.

A_b , yüksekliği b olan ikili ağacı simgelesin. O zaman, aşağıdaki şekilde görüleceği üzere, A_{b+1} , iki A_b ağacının (birine A , diğerine B diyelim) köklerinin bir köke tutturulmasıyla elde edilir.



G_b, A_b ağacının özyapı dönüşümü kümesi olsun. Demek ki $|G_b| = n_b$.

τ, A_{b+1} ağacının A ve B altağaçlarını değiş tokul eden (ve kökü sabit kılan) herhangi bir özyapı dönüşümü olsun. Dilersek τ 'yi $\tau^2 = Id$ eşitliğini sağlayacak biçimde seçebiliriz ama buna ihtiyacımız olmayacak.

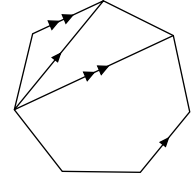
Eğer $\alpha, \beta \in G_b$ ise, $\sigma_{\alpha,\beta}$, A_{b+1} ağacının, A altağacının noktalarını α 'ya göre, B altağacının noktalarını β 'ya göre dönüştüren özyapı dönüşümü olsun. Bunlardan tam n_b^2 tane vardır. a ve b noktalarını değiştirmeyen tüm özyapı dönüşümleri bu $\sigma_{\alpha,\beta}$ özyapı dönüşümlerinden biridir, çünkü a 'yı sabit tutan bir özyapı dönüşümü a 'nın üstünde bulunan A ağacını gene kendisine göndermek zorundadır.

Bunların dışında bir de, $\alpha, \beta \in G_b$ için, $\sigma_{\alpha,\beta} \tau$ özyapı dönüşümleri var. Bunlar aynen a ve b noktalarını değiş tokuş eden özyapı dönüşümleridir. Bunlardan da tam n_b^2 tane vardır.

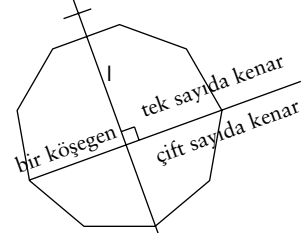
Demek ki $n_{b+1} = 2n_b^2$ ve $n_0 = 1$. Bu iki ilişkiden, tümevarımla ve kolaylıkla, $n_b = 2^{2^b-1}$ çıkar.

7a. Eğer $n > 1$ tek bir doğal sayıysa düzgün bir n -genin her köşegeninin bir kenara paralel olduğunu kanıtlayın. (**Not:** Komşu olmayan iki köşeyi birleştiren kirişe **köşegen** denir.)

7b. Bir n -genin her köşegeni bir kenara paralelse, n 'nin tek sayı olması gerektiğini kanıtlayın.



Kanıt: 7a. Herhangi bir köşegeni çekelim. n tek olduğundan, bu köşegenin bir yanında tek sayıda, diğer yanında çift sayıda kenar vardır. Tek sayıda kenarın olduğu tarafta bulunan en ortadaki kenar bu köşegene paraleldir. Bu şöyle kanıtlanabilir: Köşegenin l ortadikmesi düzgün n -genin simetri eksenidir ve köşegenin ayırdığı her iki bölgedeki kenarlar da bu l ortadikmesine göre ikiye ikiye simetrikler. Tek sayıda kenar olan bölgedeki kenarlardan biri bu simetriye göre korunmak zorundadır. İşte l 'ye göre simetrisinin değiştirmedeği bu kenar köşegene paraleldir.

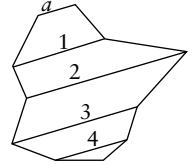


7b. Bir n -genin $n(n-3)/2$ tane köşegeni vardır ve bu köşegenlerin her biri tam iki köşeye dokunur. Demek ki

$$\{(k, P) : P \text{ köşe, } k \text{ köşegen ve } P \in k\}$$

kümesinin tam $n(n-3)$ tane elemanı vardır.

Şimdi bir a kenarına paralel olan köşegenleri sayalım. Bu köşegenlerin her biri 2 köşeye dokunur. Ama paralel oldukları a kenarının 2 köşesine dokunamazlar. a 'ya paralel en yakın köşegenden en uzaktakine kadar gidelim. En uzaktaki köşegen bir kenar olmayacağından, bu köşegenin dokunduğu iki köşe arasında köşegenin dokunmadığı bir köşe daha olmalı. Demek ki birbirine paralel köşegenler en fazla $n-3$ tane köşeye dokunabilirler. a kenarı için n tane seçeneğimiz olduğundan ve

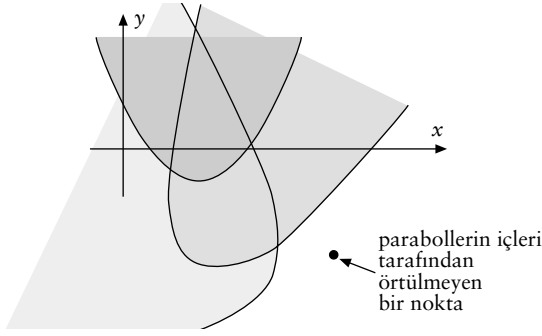


$$\{(k, P) : P \text{ köşe, } k \text{ köşegen ve } P \in k\}$$

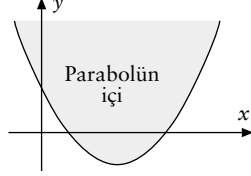
kümesinin tam $n(n-3)$ tane elemanı olduğundan, birbirine paralel köşegenler tam tamına $n-3$ tane noktaya dokunurlar. Demek ki $n-3$ çift bir sayıdır, yani n tek.

8. Sonlu sayıda parabolün içinin bir düzlemi kaplayamayacağını kanıtlayın.

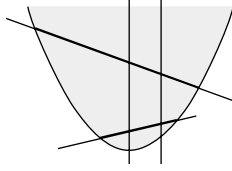
Not: Eğer $a \neq 0$ ise, $y = ax^2 + bx + c$ türünden bir denklemin grafiği bir **paraboldür**. Bu parabol şekildeki gibidir. **Parabolün içi** parabolün sınırladı-



ği dışbükey alandır. Bir parabol, bu özel parabollerden birinin döndürülmüş halidir.



Kant: Parabollerin içini örtü olarak görelim. Bir parabol, simetri eksenine paralel olan doğrular dışında, her doğrunun ancak sınırlı bir bölgesini örtebilir. Şimdi n tane parabol alalım. Bu n parabolün n simetri eksenine paralel olmayan bir doğru bu n parabol tarafından örtülemez.



9. n herhangi bir doğal sayı olsun. Düzlemde, birbirlerine olan uzaklıkların tamsayı olduğu ve doğrusal olmayan n tane nokta bulun.

Yant: Pisagor eşitliğini sağlayan n tane farklı üçlü bulalım:

$$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$$

...

$$a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$$

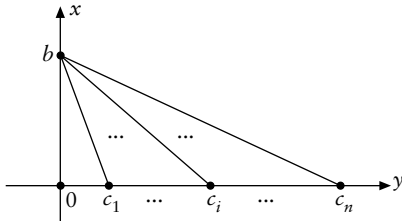
(u_i, v_i) çifti için, $a_i = u_i^2 - v_i^2$, $b_i = 2u_i v_i$, $c_i = u_i^2 + v_i^2$ olarak seçebiliriz. Buradan,

$$d_1^2 + b = e_1^2$$

...

$$d_n^2 + b^2 = e_n^2$$

eşitliklerini sağlayan sayılar bulabiliriz. (Örneğin, $b = b_1 \dots b_n$ olsun; her $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$ denklemini



b^2/b_i^2 sayısıyla çarpın.) Şimdi $n+2$ noktayı yukarıdaki gibi seçin.