

Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Yakınsak Diziler ve Sıralama

Bu yazıda, gerçel sayıların sıralamasıyla dizilerin limitleri arasındaki ilişkiyi kısaca irdedeceğiz. Bu ilişkinin özü aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 1 [Sandviç Teoremi]. $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \leq y_n \leq z_n$ eşitsizlikleri belli bir M göstergecinden sonra doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlarsa, $(y_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve diğer dizilerle aynı sayıya yakınsar.

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$



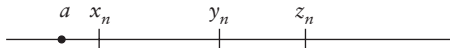
Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri a 'ya yakınsasınlar. $(y_n)_n$ dizisinin de a 'ya yakınsadığını kanıtlayacağız, yani $\varepsilon > 0$, herhangi bir pozitif sayıya,

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her $n > N$ için doğru olduğu bir N sayısı bulacağız. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n 'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için $|y_n - a|$ ifadesiyle oynayacağız. Hesaplarda rahat etmek



için $n > M$ alalım. Bu kısıtlama yetmeyecek ama bu sayede, hiç olmazsa,

$$\begin{aligned} |y_n - a| &= |a - x_n + x_n - y_n| \\ &\leq |a - x_n| + |x_n - y_n| \\ &\leq |a - x_n| + (y_n - x_n) \\ &\leq |a - x_n| + (z_n - x_n) \\ &\leq |a - x_n| + |z_n - a| + |a - x_n| \\ &= 2|a - x_n| + |z_n - a| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki en sondaki

$$2|a - x_n| + |z_n - a|$$

ifadesini ε 'dan küçük yapmak yeterli. $(x_n)_n$ dizisi a 'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için

$$|x_n - a| = |a - x_n| < \varepsilon/3$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için

$$|a - z_n| < \varepsilon/3$$

olur. $N = \max\{M, N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$|y_n - a| = 2|a - x_n| + |z_n - a| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

elde ederiz ve kanıt böylece tamamlanır.

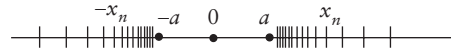
İkinci Kanıt: Bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. a , $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizilerinin limiti olsun. O zaman büyük n 'ler için, hem $a - \varepsilon < x_n$ hem de $z_n < a + \varepsilon$ olur. (Neden?) Demek ki belki biraz daha büyük n 'ler için

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

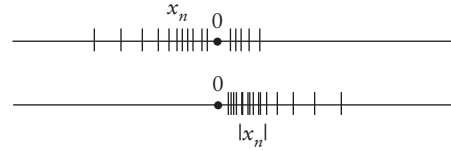
olur. Bu büyük n 'ler için $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, yani $|y_n - a| < \varepsilon$ olur. \square

Aşağıdaki önsav, bu yazıda olmasa da ilerde gerekecek.

Önsav 2. i) $(x_n)_n$ dizisinin a 'ya yakınsaması için, $(-x_n)_n$ dizisinin $-a$ 'ya yakınsaması gerek ve yeter koşuldur.



ii) $(x_n)_n$ dizisinin 0 'a yakınsaması için, $(|x_n|)_n$ dizisinin 0 'a yakınsaması gerek ve yeter koşuldur.



iii) $(x_n)_n$, 0 'a yakınsayan bir diziye ve yeterince büyük n göstergeçleri için (yani belli bir M göstergecinden sonra) $|y_n| \leq |x_n|$ ise, $(y_n)_n$ dizisi de 0 'a yakınsar.

iv) $(x_n)_n$ dizisi a 'ya yakınsıyorsa, $(|x_n|)_n$ dizisi de $|a|$ 'ya yakınsar.

Kanıt: i) Önermenin sadece bir yönünü kanıtlamak yeterli elbette. $(x_n)_n$ dizisi a 'ya yakınsasın ve $\varepsilon > 0$ olsun. N , her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlatan göstergeç olsun. O zaman her $n > N$ için, $|-x_n - (-a)| = |-x_n + a| = |x_n - a| < \varepsilon$ olur ve kanıtımız tamamlanır.

ii) $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ olduğundan, yukarıdakinden ($a = 0$ alın) ve Sandviç Teoremi'nden, $(|x_n|)_n$ dizisi 0 'a yakınsıyorsa, $(x_n)_n$ dizisinin de 0 'a yakınsadığı

anlaşılır. Şimdi $(x_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. N , her $n > N$ için,

$$|x_n| = |x_n - 0| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan göstergeç olsun. O zaman her $n > N$ için, $\|x_n\| - 0 = \|x_n\| < \varepsilon$ olur ve kanıtımız tamamlanır.

iii) Yeterince büyük n 'ler için $0 \leq |y_n| \leq |x_n|$ olduğundan ve sabit 0 dizisi 0'a yakınsadığından, Sandviç Teoremi'nden $(y_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığı çıkar.

iv) $\varepsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük n göstergeçleri için, $\|x_n\| - |a| < \varepsilon$ eşitsizliğini göstermeliyiz. Sayfa xx'teki Önsav 1.ix'a göre,

$$\|x_n\| - |a| \leq |x_n - a|$$

olduğundan ve sağdaki $|x_n - a|$ terimi yeterince büyük n göstergeçleri için ε 'dan küçük olduğundan, kanıtımız tamamlanmıştır. \square

Öte yandan yukardaki (iv)'ün tersi yanlıştır. Örneğin, $x_n = (-1)^n$ ise $(|x_n|)_n$ dizisi 1'e yakınsar ama $(x_n)_n$ dizisi hiçbir sayıya yakınsamaz.

Şimdi de yakınsak bir dizinin terimlerinin sınırsız bir biçimde artıp azalamayacağını kanıtlayalım.

Teorem 3. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır, yani eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa, o zaman öyle bir B vardır ki, her n için $|x_n| < B$ 'dir.*

Kanıt: Kanıtın anafikri çok basit: Eğer bir dizi a 'ya yakınsıyorsa, bu dizinin terimleri a 'dan sürekli uzaklaşamazlar...

Bir a sayısına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. Yakınsamanın tanımında ε 'u 1'e eşit alalım. 1, 0'dan büyük bir sayı olduğundan buna hakkımız var. O zaman dizinin terimleri belli bir N göstergecinden sonra $(a - 1, a + 1)$ aralığına düşer, yani her $n > N$ için, $x_n \in (a - 1, a + 1)$ olur. Geriye sonlu tane x_0, x_1, \dots, x_N terimi kalır. Bunlar da sınırlı bir aralığa sığarlar elbette. Daha biçimsel olalım ve

$$A = \min\{x_0, x_1, \dots, x_N, a\} - 1,$$

$$B = \max\{x_0, x_1, \dots, x_N, a\} + 1$$

tanımlarını yapalım. O zaman her x_n terimi (A, B) aralığına düşer. Demek ki dizi sınırlıdır. \square

Demek ki sınırlı olmayan bir dizi iraksak olmak zorundadır. Örneğin, 0, 1, 2, 3, 4, ... doğal sayı dizisi iraksaktır.

Öte yandan, her sınırlı dizi yakınsak değildir. Örneğin, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... diye devam eden dizi sınırlıdır ama yakınsak değildir.

Alıştırmalar

1. Sınırlı diziler kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

2. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. $(1/x_n)_n$ dizisinin (var olması ve) sınırlı olması için,

her n için, $0 < \delta < |x_n|$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

3. $(x_n)_n$ sınırlıysa, $(y_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa, $(x_n y_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

Sup ve İnf Alıştırmaları

1) Gerçek sayılar kümesinin boş olmayan ve alttan sınırlı bir X altkümesinin en büyük altsınırının olduğunu kanıtlayın. Bu altsınıra $\inf X$ adı verilir. $\inf X = -\sup(-X)$ eşitliğini kanıtlayın.

2) Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $r > 0$ ise, $\sup(cX) = c \sup X$ ve $\inf(cX) = c \inf X$ eşitliklerini kanıtlayın. ($\sup X$ ve $\inf X$ varsa elbette.) $r < 0$ ise, $\sup(cX) = c \inf X$ ve $\inf(cX) = c \sup X$ eşitliklerini kanıtlayın.

3) $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in X$ için, $x \leq y$ eşitsizliğini sağlayan bir $y \in Y$ olsun. $\sup Y$ varsa $\sup X$ 'in de olduğunu ve $\sup X \leq \sup Y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

4) $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan iki altküme olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq y$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $\sup X$ ve $\inf Y$ 'nin olduğunu ve $\sup X \leq \inf Y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

5) $X \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı ve boş olmayan bir altküme olsun. Y, X 'in üstsınırlarından oluşan küme olsun. $\sup X = \inf Y$ eşitliğini kanıtlayın.

6) $X \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı ve boş olmayan bir altküme olsun. $s = \sup X$ ancak ve ancak

a) Her $x \in X$ için $x \leq s$ ise ve

b) Her $\varepsilon > 0$ için, $s - \varepsilon < x \leq s$ eşitsizliklerini sağlayan bir $x \in X$ varsa.

7) Y, X 'in üstsınırlarından oluşan küme olsun. $\sup X = \inf Y$ eşitliğini kanıtlayın.

8) $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan ve üstten sınırlı iki altküme olsun. $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ olsun. $\sup(X + Y)$ 'nin olduğunu ve

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

eşitliğini kanıtlayın.

9) $X, Y \subseteq \mathbb{R}^{>0}$ boş olmayan ve üstten sınırlı iki altküme olsun. $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ olsun. $\sup(XY)$ 'nin olduğunu ve

$$\sup(XY) = (\sup X)(\sup Y)$$

eşitliğini kanıtlayın. \blacklozenge